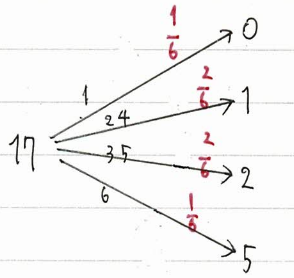
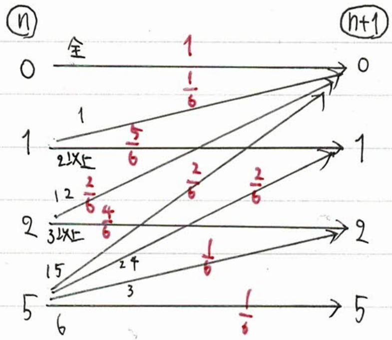
2003年　東大数学　文系　第4問

はじめの1回での図は、



※黒字は出た目、
赤字は確率

n回目から n+1回目の図は、以下、



以上から

・X_nは単調減少 $(X_n \geqq X_{n+1})$

・0、1、2、5の値しかない　とわかる。

(1) $X_3 \neq 0$ の確率をもとめると、

$(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 1)$　$(5, 2, 2)$

$(2, 2, 2)$　$(5, 5, 2)$

$(5, 1, 1)$　$(5, 5, 5)$

$(5, 5, 1)$　の7通り。

それぞれ、$(1, 1, 1)$ の確率は、$\frac{2}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{50}{216}$

$(2, 2, 2)$: $\frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{32}{216}$

$(5, 1, 1)$: $\frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{216}$

$(5, 5, 1)$: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{216}$

$(5, 2, 2)$: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{216}$

$(5, 5, 2)$: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$(5, 5, 5)$: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

よって、全ての和をとり、$\frac{100}{216} = \frac{25}{54}$

よって $X_3 = 0$ の確率は

$1 - \frac{25}{54} = \frac{29}{54}$

(2) $X_n = 5$ となるとき、サイコロの目は全て6なので、$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

(3) $X_n = 1$ となるのは、

1度でも2になると $X_n = 1$ にはならない

(i) $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$ (ずっと1)

(ii) $X_1 = \cdots X_k = 5$　$X_{k+1} = \cdots X_n = 1$ (途中まで5、あとは1)

の2種類がある。

(i) $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$ の場合、

サイコロは1回目に、2か4が出て、$\frac{2}{6}$

そのあとは、2以上が出るので、$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

$\frac{2}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

(ii) $X_1 = \cdots X_k = 5$　$X_{k+1} = \cdots = X_n = 1$ の場合、

サイコロは1回目〜k回目に6が出て、$\left(\frac{1}{6}\right)^k$

次に、2か4が出て、$\frac{2}{6}$

そのあとは、2以上が出つづける。$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}$

よって $\left(\frac{1}{6}\right)^k \times \frac{2}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1} = \frac{2 \times 5^{n-1}}{6^n} \times \left(\frac{1}{5}\right)^k$

kは、$1 \leqq k \leqq n-1$ で動くので、　何回目まで5が出るか

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2 \times 5^{n-1}}{6^n} \times \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{2 \times 5^{n-1}}{6^n} \times \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{5}}$$

$= \cdots\cdots$

$= \frac{1}{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$

以上より　$\frac{2}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{5^n - 1}{6^n}$

※ $k=0$ を代入すると、(i)の結論の $\frac{2}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ に一致する。

よって、求める確率を

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \frac{2}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}$ とまとめられる。